Zadatak 1.

Dokažite da vrijedi
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dokaz. Od n ljudi biramo njih k koji će ići na svjetsko prvenstvo. TO možemo na $\binom{n}{k}$ načina, što je upravo lijeva strana jednakosti. Isti odabir smo mogli napraviti i tako da smo odabrali $n-k$ ljudi koji neće ili, za što pak ima $\binom{n}{n-k}$ načina. Po principu dostrukog prebrojavanja zaključujemo da se ta dva broja podudaraju, što upravo dalje željeni identitet. ∎

Zadatak 2.

Dokažite da vrijedi

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Od n učenika u razredu biramo njih k koji će igrati nogomet, za što imamo $\binom{n}{k}$ mogućnosti. Zatim od k odabranih biramo jednog koji će biti kapetan, za što imamo $\binom{k}{1} = k$ mogućnosti. Ukupno za ovakav odabir imamo $k \cdot \binom{n}{k}$ mogućnosti.

Isti odabir smo mogli napraviti i tako da smo najprije od n učenika birali kapetana, što možemo na $\binom{n}{1} = n$ načina, a zatim od preostalih $n-1$ učenika biramo njih $k-1$ koji će činiti ostatak momčadi, za što imamo $\binom{n-1}{k-1}$ načina. Ukupno imamo $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ načina.

Po principu dvostrukog prebrojavanja zaključujemo da se ta dva broja podudaraju, što dokazuje željeni identitet. ■

Zadatak 3.

Dokažite da vrijedi

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

Dokaz. Na Eurosongu od n država biramo njih m koji će ići u polufinale, a zatim od tih m biramo njih r koji će ići u finale. Za prvi odabir imamo $\binom{n}{m}$ načina, a za drugi odabir imamo $\binom{m}{r}$ načina, pa ukupno imamo $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r}$ mogućnosti.

Jednak odabir mogli smo napraviti i tako da smo najprije od početnih n birali njih r koji će ići u finale, što možemo na $\binom{n}{r}$ načina, a zatim od preostalih $n-r$ birati birati njih $m-r$ koji će nastupiti u polufinalu, ali neće ići u finale, za što imamo $\binom{n-r}{m-r}$ mogućnosti. Ukupno, takav izbor možemo napraviti na $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$ načina.

Sada princip dvostrukog prebrojavanja dokazuje traženi identitet. ■

Zadatak 4.

Dokažite da ukoliko zbrojimo sve prijatelje svih osoba na Facebooku dobivamo paran broj.

Dokaz. Označimo zbroj svih prijatelja svih ljudi na Facebooku sa N. Pretpostavimo da na Facebooku ima n ljudi i označimo ih (nekako) brojevima $1, 2, \ldots, n$. Isto tako, uz pretpostavku da ima m prijateljstava na Facebooku označimo prijateljstava sa $p_1, p_2, \ldots p_m$. Promatramo sljedeći skup uređenih parova

$$F = \{(i, p_i) \mid \text{osoba} i \text{sudjeluje u prijateljstvu} r_j\}.$$

Prebrojat ćemo sve elemente skupa na dva načina (jednom po prvoj, a zatim po drugoj varijabli).

Uzmimo proizvoljan $1 \leq i \leq n$. Tada se i na prvoj koordinati pojavljuje točno onoliko puta koliko osoba i ima prijateljstava. Dakle, ukupan broj elemenata skupa F ima koliko ima ukupno prijateljstava svih osoba na Facebooku, što smo označili sa N.

Sada brojimo elemente skupa F po drugoj varijabli. Fiksirajmo proizvoljan $1 \leq j \leq m$. Budući da u svakom prijateljstvu sudjeluju točno dvije osobe, postoje točno 2 elementa skupa F čija je druga komponenta jednaka r_j, pa ukupno ima $m \cdot 2$ elemenata skupa F.

Po principu dvostrukog prebrojavanja zaključujemo da se ta dva broja podudaraju, što daje

$$N = 2m.$$

Dakle je N paran broj, što se je i tvrdilo. ∎

Zadatak 5.

Pred vama se nalazi ploča dimenzija 9×3 sastavljena od 1×1 pločica. Na svaku pločicu stavljen je crveni ili zeleni Skittles. Dokažite da u svakom takvom rasporedu uvijek postoje dva (ne nužno susjedna) reda i dva (ne nužno susjedna) stupca čiji presjek daje Skittlse iste boje.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Želimo doći do kontradikcije.

Označimo retke brojevima $1, \ldots, 9$, a stupce s_1, s_2, s_3. Nadalje, označimo $S_{ij} = \{s_i, s_j\}$ i definirajmo skup

$$F = \{(k, S_{ij}) \mid \text{ presjek retka } k \text{ sa stupcima } s_i \text{ i } s_j \text{ daje par Skittlesa iste boje}\}.$$

Prebrojat ćemo elemente skupa F na dva načina.

Prvo brojimo po retcima k. Budući da ima tri kvadrata u svakom retku slijedi da barem 2 od tri moraju imati Skittlese iste boje. Kako ima 9 redaka imamo $|F| \geq 9$.

Sada brojimo po stupcima. Po pretpostavci niti jedan par redaka i par stupaca u presjeku ne daju Skittlese iste boje. Stoga, svaki par stupaca ima najviše jedan par crvenih Skittlesa u istom retku i najviše jedan par zelenih Skittlesa u istom retku. Budući da ima tri para stupaca ima najviše 6 takvih parova. Dakle je $|F| \leq 6$.

Slijedi da je

$$|F| \leq 6 < 9 \leq |F|,$$

što nije moguće. Kontradikcija pokazuje da je pretpostavka bila kriva, pa tvrdnja slijedi. ∎