Zadatak 1.

Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dokaz. Primjetimo najprije da koristeći identitet $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ dobivamo ekvivalentnu jednakost

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n},$$

koju je kombinatorno lakše interpretirati.

U razredu od n djevojaka i n dječaka biramo njih n koji će četkicom za zube čistiti ploču. Za to imamo $\binom{n+n}{n}$ mogućnosti.

Isti izbor smo mogli napraviti tako da smo od n djevojaka birali njih k (za što imamo $\binom{n}{k}$ mogućnosti), a zatim od n dječaka birali njih $n-k$ (za što imamo $\binom{n}{n-k}$ mogućnosti), a to možemo napraviti na $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$ načina. Kako je k mogao biti bilo koji broj iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ slijedi da ukupno imamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

mogućnosti.

Princip dvostrukog prebrojavanja implicira

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n},$$

za što smo dokazali da je ekvivalentno danom identitetu. ∎

Zadatak 2.

Neka su n i k cijeli brojevi takvi da $0 \leq k \leq n$. Dokažite da vrijedi

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dokaz. Promatramo skup prvih $n+1$ prirodnih brojeva, odnosno

$$S = \{1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Tada desna strana jednakosti odgovara odabiru $k+1$ članog podskupa skupa S.

Podskup od $k+1$ elemenata mogli smo napraviti i na sljedeći način. Najprije od $n+1$ elementa biramo najvećeg u podskupu, neka je to element $r+1$. Ostatak podskupa tada radimo tako da zapravo iz skupa $\{1, 2, \ldots, r\}$ biramo k-člani podskup, što možemo na $\binom{r}{k}$ načina. Najveći element $k+1$ članog podskupa skupa $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ ne može biti manji od $k+1$ jer u protivnom ne bismo imali dovoljno elemenata za odabrati preostalih k elemenata. Dakle najveći element tog podskupa može biti bilo koji $k+1 \leq r+1 \leq n+1$, pa slijedi da takav podskup možemo odabrati na

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k}$$

načina.

Princip dvostrukog prebrojavanja sada daje tvrdnju. ■

Zadatak 3.

Označimo sa $p_n(k)$ broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje imaju točno k fiksnih točaka. Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

Dokaz. Definirajmo skup

$$S = \{(i, \sigma) \mid 1 \leq i \leq n, \sigma(i) = i\}.$$

Dakle, skup S je skup svih uređenih parova (i, σ) gdje je i broj iz danog skupa, a σ je permutacija danog skupa kojoj je i fiksna točka. Prebrojat ćemo elemente skupa S na dva načina.

Prvo brojimo po prvoj varijabli. Neka je $1 \leq i \leq n$. Promotrimo permutaciju τ definiranu sa

$$\tau(j) = \begin{cases} i, & j = n, \\ n, & j = i, \\ j, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada vrijedi da je i fiksna točka permutacije σ ako i samo ako je n fiksna točka permutacije $\tilde{\sigma} = \tau \circ \sigma \circ \tau$. Ovo pokazuje da je za svaki $1 \leq i \leq n$ broj elemenata skupa S čija je prva komponenta jednaka i jednako koliko i elemenata iz S čija je prva komponenta jednaka n.

Uzmimo sada proizvoljan $(n, \sigma) \in S$. Tada je $\sigma(n) = n$, pa kada ograničimo permutaciju σ na prvih $n-1$ elemenata dobivamo permutaciju skupa $\{1, \ldots, n-1\}$. Ovih permutacija ima $(n-1)!$. Zaključujemo da za svaki $1 \leq i \leq n$ u skupu S ima točno $(n-1)!$ parova oblika (i, σ), pa je ukupan broj elemenata skupa S jednak $n \cdot (n-1)! = n!$.

Sada brojimo po drugoj varijabli. Uzmimo proizvoljnu permutaciju σ skupa $\{1, \ldots, n\}$. je $(j, \sigma) \in S$ ako i samo ako je j fiksna točka permutacije σ. Dakle, elemenata skupa S oblika (i, σ) ima točno onoliko koliko permutacija σ ima fiksnih točaka. Permutacija može imati bilo koliko između 0 i n fiksnih točaka, pa uz oznaku $p_n(k)$ danu u tekstu zadatka slijedi da je broj elemenata skupa S jednak

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k).$$

Princip dvostrukog prebrojavanja kaže da se ta dva broja podudaraju pa je

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!,$$

što smo i trebali vidjeti. ∎

Zadatak 4.

Na kulinarskom natjecanju sudjeluje m ljudi i n sudaca, gdje je $n \geq 3$ neparan prirodan broj. Svaki sudac ocjenjuje svakog natjecatelja sa "prošao" ili "pao". Pretpostavimo da je k prirodan broj takav da se za bilo koja dva suca ima najviše k poklapanja ocjena. Dokažite da vrijedi

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

Dokaz. Označimo natjecatelje brojevima $1, \ldots, m$, a suce sa $s_1, \ldots, s_n$. Definiramo dvočlane podskupove $S_{ij} = \{s_i, s_j\}$. Ocjenit ćemo broj elemenata skupa

$$T = \{(S_{ij}, l) \mid \text{ocjene sudaca } s_i \text{ i } s_j \text{ se podudaraju na natjecatelju } l\}$$

na dva načina.

Najprije brojimo po prvoj komponenti i to će biti ocjena odozgo. Uzmimo proizvoljan S_{ij}. Par sudaca određen skupom S_{ij} ima najviše k poklapanja ocjena, pa elemenata skupa T čija je prva komponenta jednaka S_{ij} ima najviše k. Budući da je n sudaca, imamo $\binom{n}{2}$ parova sudaca pa slijedi da T ima najviše $\binom{n}{2} \cdot k$ elemenata, dakle

$$|T| \leq k\binom{n}{2}. \tag{1}$$

Sada ocjenjujemo broj elemenata skupa na **po drugoj komponenti** i to će biti ocjena odozdo. Označimo sa a_l broj sudaca koji su pustili l-tog natjecatelja, a sa b_l broj sudaca koji su rušili l-tog natjecatelja. Tada je broj parova sudaca čije se ocjene poklapaju na l-tom natjecatelju jednak broju zbroju parova koji su ga pustili i parova koji su ga rušili, odnosno

$$\binom{a_l}{2} + \binom{b_l}{2}.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\binom{a_l}{2} + \binom{b_l}{2} &= \frac{a_l(a_l-1)}{2} + \frac{b_l(b_l-1)}{2} \\
&= \frac{a_l^2 - a_l + b_l^2 - b_l}{2} \\
&= \frac{a_l^2 + b_l^2}{2} - \frac{a_l + b_l}{2}.
\end{aligned}$$

Sada korištenjem kvadratno-aritmetičke nejednakosti

$$\left(\frac{a_l + b_l}{2}\right)^2 \leq \frac{a_l^2 + b_l^2}{2}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\binom{a_l}{2}+\binom{b_l}{2} &\geq \frac{(a_l+b_l)^2}{4}-\frac{a_l+b_l}{2}\\ &= \frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}\\ &= \frac{1}{4}(n^2-2n)\\ &= \frac{1}{4}\left[(n-1)^2-1\right]\\ &= \frac{(n-1)^2}{4}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Budući da je n neparan prirodan broj veći ili jednak 3 slijedi da je $(n-1)^2$ dijeljiv s 4, pa je $(n-1)^2/4$ prirodan broj. Kako je i $\binom{a_i}{2}+\binom{b_i}{2}$ prirodan broj slijedi da $-1/4$ slobodno obrišemo bez da izgubimo nejednakost. Dakle,

$$\binom{a_i}{2}+\binom{b_i}{2} \geq \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Dakle, elemenata skupa T čija je druga komponenta jednaka l ima barem $\frac{(n-1)^2}{4}$, a kako ima m natjecatelja slijedi da elemenata skupa T ima barem $m \cdot \frac{(n-1)^2}{4}$, dakle

$$|T| \geq m\frac{(n-1)^2}{4}. \tag{2}$$

Kombiniranjem (1) i (2) dobivamo

$$k \cdot \binom{n}{2} \geq m \cdot \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Iz ovoga lako slijedi tražena nejednakost

$$\begin{aligned}k \cdot \binom{n}{2} &\geq m \cdot \frac{(n-1)^2}{4}\\ k\frac{n(n-1)}{2} &\geq m\frac{(n-1)^2}{4}\\ kn &\geq m(n-1)\\ \frac{k}{m} &= \frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

■

Zadatak 5.

Na sveučilišnom kampusu ima 2022 studentice i 2022 studenta. Svaki student se uključio u neke studentske klubove, a niti jedan student se nije uključio u više od njih 100. Poznato je da se svaki muško-ženski ima barem jedan zajednički klub. Dokažite da postoji klub sa barem 12 studenata i barem 12 studentica.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: svaki studentski klub ima najviše 11 studenata ili najviše 11 studentica. Želimo doći do kontradikcije. Označimo studente sa $d_1, \dots, d_{2022}$ i studentice sa $c_1, \dots, c_{2022}$.

Definirajmo skup

$$T = \{(d_i, c_j, k) \mid \text{student } d_i \text{ i studentica } c_j \text{ članovi su kluba } k\}.$$

Ocjenit ćemo broj elemenata skupa T na dva načina.

Najprije, po pretpostavci svaki muško-ženski par ima barem jedan zajednički klub pa skup T ima barem $2022 \cdot 2022$, dakle

$$|T| \geq 2022^2 \tag{3}$$

Sada ćemo ocjeniti broj elemenata skupa T odozgo. Označimo sa X skup svih klubova koji ima najviše 11 muških studenata a sa Y skup svih klubova koji imaju barem 12 muških studenata (a tada po pretpostavci ti klubovi imaju najviše 11 studentica). Uzmimo proizvoljan $k_0 \in X$. Tada je uređenih trojki $(d_i, c_j, k) \in T$ takvih da je $k = k_0$ najviše

$$2022 \cdot 100 \cdot 10. \tag{4}$$

Naime, za odabir studentice c_j imamo 2022 mogućnosti. Nakon što smo odabrali studenticu, slijedi da klub k_0 mora biti jedan od najviše 100 klubova u koji se ta studentica učlanila. Dakle je $2022 \cdot 100$ mogućnosti za $(-, c_j, k_0)$. Budući da klub k_0 ima najviše 11 muških studenata, imamo 11 mogućnosti za odabir d_i pa vrijedi (4). Kao što smo primjetili, ukoliko je $k \in Y$ tada je studentica najviše 11, pa imamo sasvim simetričnu situaciju i u ovom slučaju. Budući da je svaki klub k ili element skupa X ili element skupa Y slijedi da je skup T nema više od $2022 \cdot 100 \cdot 10 + 2022 \cdot 100 \cdot 10$ elemenata, odnosno

$$|T| \leq 2 \cdot 2022 \cdot 100 \cdot 10. \tag{5}$$

Kombiniranjem (3) i (5) dobivamo

$$\begin{aligned} 2022^2 &\leq 2 \cdot 2022 \cdot 100 \cdot 10 \\ 2022^2 &\leq 2022 \cdot 2000 \\ 2022 &\leq 2000, \end{aligned}$$

što (najvjerojatnije) nije istina. Kontradikcija pokazuje da je pretpostavka bila kriva; Postoji klub sa barem 12 studenata i barem 12 studentica. ∎