

<b>J</b>	Juniori grupa
----------	------------------

Pripreme za državno  
Zagreb, travanj 2023.

## Zabavni TB mix

Hrvoje Radoš  
13.4.2023.



Mladi nadareni matematičari  
"Marin Getaldić"

*Sretno na državnom - Hrvoje Radoš*

### Zadaci

1. Odredi posljednjih 2019 znamenki broja  $2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017}$
2. Neka su  $a, b, c$  prirodni brojevi takvi da  $6 \mid a + b + c$ . Dokažite da  $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$
3. Pronađite sve trojke prirodnih brojeva  $(x, y, z)$  za koje vrijedi:

$$5^x 7^y + 4 = 3^z$$

4. Za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , neka je  $s(n)$  broj uređenih parova  $(x, y)$   $x, y \in \mathbb{N}$  za koje vrijedi:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

Odredite sve  $n$  za koje  $s(n) = 5$ .

5. Pronađite sve parove  $(x, y)$ , za koje vrijedi:

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

6. Dokažite da jednačba  $(x+1)^2 + (x+2)^2 \dots (x+99)^2 = y^z$ , nije rješiva u skupu prirodnih brojeva gdje  $z > 1$ .
7. Pronađite sve prave trokute s cjelobrojnim duljinama stranica takvim da su površina trokuta i njegov opseg jednaki.
8. Riješite u skupu prirodnih brojeva:

$$3(xy + xz + zy) = 4xyz$$

9. Neka su  $x, y, z, u, v$  prirodni brojevi takvi da:

$$xyzuv = x + y + z + u + v$$

Odredite  $\max(x, y, z, u, v)$

10. Odredi sve prirodne brojeve  $m$  i  $n$  takve da je  $2^{n!} = m^3 + 37$
11. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(m, n)$ ,  $m, n > 1$ , za koje je  $n^3 - 1$  djeljivo s  $mn - 1$ .
12. Pronađi sve prirodne trojke  $(m, n, k)$  takve da vrijedi:

$$3^m + 7^n = k^2$$

13. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(a, b)$  za koje  $a^2b$  dijeli  $b^2 + 3a$ .

## Rješenja

Zadatci su uzeti većinom iz **zbirka**. Ja sam ovdje napisao gdje se nalaze zadatci, vi možete na kraju knjige pronaći rješenja.

1. 2018 nula i onda trivijalan rad s kongruencijama mod 10
2. **rješenje**
3. **zbirka** str. 34. zad 7.
4. **zbirka** str. 14. zad 2.
5. **zbirka** str. 15. zad 6.
6. **zbirka** str. 30. zad 1.
7. **zbirka** str. 15. zad 9.
8. **zbirka** str. 19. zad 1.
9. **zbirka** str. 20. zad 9.
10. Državno 2022 4. razz 1. zadatak
11. Državno 2009 4. razz 4. zadatak
12. Državno 2016 4. razz 4. zadatak
13. Državno 2018 3. razz 3. zadatak